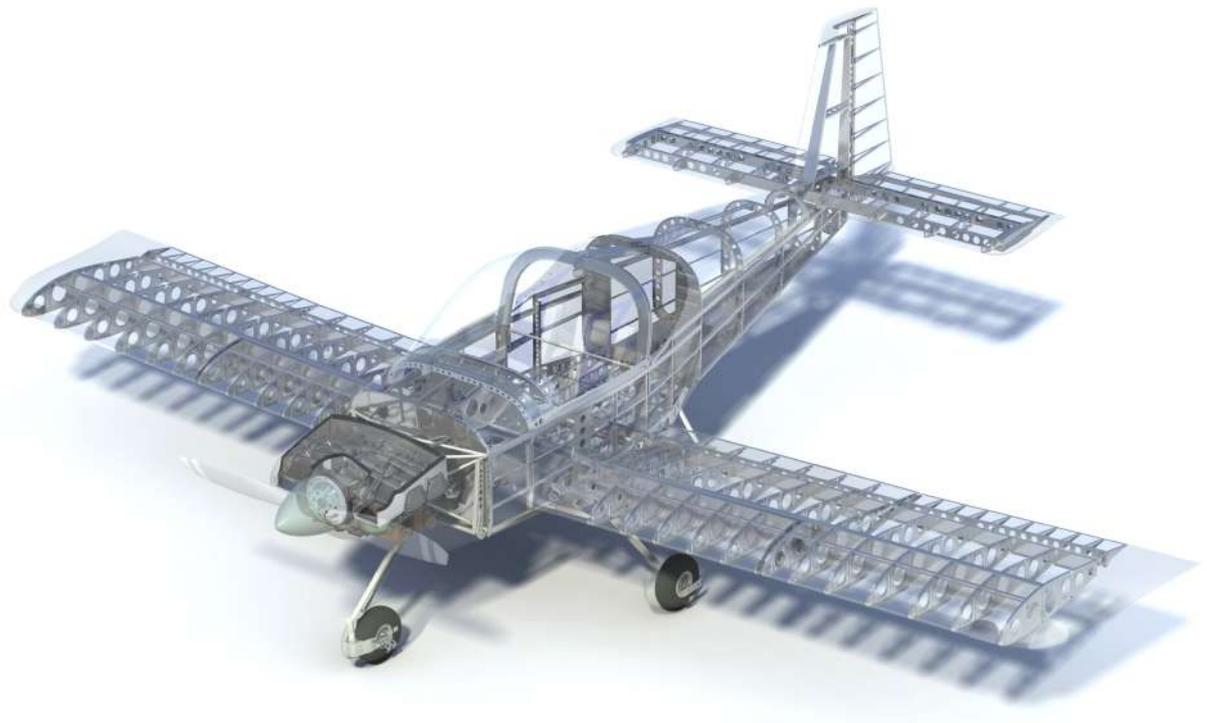


Principi di Strutture Aerospaziali



Principi DI



Prefazione

Il seguente testo è indirizzato agli studenti del corso di Strutture Aerospaziali del Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale. Esso è realizzato a partire da un'attenta analisi e rielaborazione delle lezioni del corso e prendendo anche spunto dai seguenti testi:

- Enrico Ferrante, *Dispense del corso di Strutture Aerospaziali I*;
- Erasmo Viola, *Esercitazioni di Scienza delle costruzioni, Volumi 1 e 2*, Bologna, Pitagora Editrice, 1985.

Questo testo contiene tutte le informazioni necessarie per comprendere ogni aspetto del corso e superare con successo l'esame (senza ricorrere ad ulteriori spese per libri o appunti). In particolare, esso è strutturato in due macro parti: la prima riguarda prettamente la teoria, mentre la seconda consiste in una ricca raccolta di esercizi svolti.

Al fine di tenere aggiornato questo testo negli anni, è possibile inviare alla pagina Facebook *Principi DI* (<https://www.facebook.com/PrincipiDI>) segnalazioni di eventuali errori presenti nel testo (di qualsiasi natura: ortografia, grammatica, passaggi matematici), proposte di aggiunte (qualora negli anni fossero affrontati nuovi argomenti durante il corso) o di variazioni della struttura del testo, oltre che a richiedere qualsiasi informazione riguardo la collana di libri *Principi DI*.

Nelle pagine successive è mostrata la presentazione della collana.

Altri esercizi svolti di Strutture Aerospaziali

Lo sapevi? Esiste una cartella Dropbox che contiene moltissimo materiale relativo a tutti i corsi di Ingegneria Aerospaziale, tra cui tutorial di Disegno Tecnico e Industriale, risposte a domande frequenti di Fisica Generale, programmi di Elementi di Informatica, schemi da utilizzare per ripetere, registrazioni, tracce d'esame ed esercizi svolti (anche di Strutture!), nonché tutti i file disponibili sui siti web dei professori, ma organizzati in un unico spazio comodo e veloce da consultare.

L'accesso è completamente gratuito ed immediato!

Cerca su Facebook la pagina "**Dropbox unina aerospaziale**": non dimenticare di mettere mi piace e diffonderla, specialmente con i ragazzi del primo anno!

Indice - Teoria

○	Le strutture e i carichi.....	2
▫	Elementi strutturali principali e secondari	3
▫	Elementi strutturali in un aereo	3
▫	Scelta del materiale e delle tecniche costruttive	4
▫	Giunzioni e vincoli.....	5
▫	Strutture sandwich	6
○	Forze di volume e forze superficiali.....	6
▫	Corpi in equilibrio e caratterizzazione del sistema di forze interne.....	7
○	Tensore delle tensioni	8
▫	Equazioni indefinite dell'equilibrio.....	10
▫	Simmetria del tensore degli sforzi.....	11
▫	Equazioni di Cauchy ed equazioni ai limiti.....	11
○	Direzioni principali di tensione	13
▫	Equazione secolare.....	13
▫	Tensioni massime e minime	14
▫	Altre proprietà dell'equazione secolare	14
○	Tipologie di stato tensionale	15
▫	Stato tensionale piano.....	16
▫	Stato tensionale monoassiale.....	17
○	Cambiamento di sistema di riferimento.....	17
○	Cerchio di Mohr.....	18
▫	Utilizzo del cerchio di Mohr.....	19
○	Condizioni di congruenza interna ed esterna.....	21
○	Analisi della deformazione. Deformabilità e funzioni di spostamento	23
○	Significato fisico degli elementi del tensore di deformazione	26
○	Metodi e strumenti per il calcolo delle deformazioni: gli estensimetri	29
▫	Utilizzo di più di un estensimetro	31
○	Direzioni principali di deformazione	32
▫	Significato fisico dell'invariante D_1 : il coefficiente di dilatazione cubica	34
▫	Stato di deformazione piano	34
▫	Equazioni di congruenza interna	35
○	Rapporto tra stato tensionale e di deformazione: proprietà dei materiali.....	36
▫	Classificazione delle leghe di alluminio	37
▫	Determinazione delle proprietà delle leghe.....	38
○	Diagramma tensione-deformazione.....	40
▫	Invertibilità dell'operazione di carico	42
▫	Ciclo di isteresi.....	42
▫	Fattori di carico e margini di sicurezza	43
○	Relazioni analitiche tra tensioni e deformazioni	44
▫	Relazioni dirette e inverse di Navier.....	47
▫	Scrittura completa delle equazioni di Navier	48

▫	Equazioni di Navier per uno stato tensionale piano.....	49
○	Problema dell'equilibrio elastico.....	50
▫	Unicità della soluzione: il teorema di Kirchhoff.....	50
▫	Risoluzione del problema all'equilibrio: metodo degli spostamenti.....	51
▫	Risoluzione del problema all'equilibrio: metodo delle forze.....	52
○	Problema dell'equilibrio elastico: casi semplificati.....	53
▫	Stato di tensione monoassiale.....	53
▫	Stato di deformazione monoassiale.....	54
○	Descrizione energetica.....	54
▫	Teorema di Clapeyron.....	57
▫	Criterio di Hencky-von Mises.....	58
▫	Casi semplificati.....	60
▫	Margine di sicurezza.....	60
○	Teorema dei lavori virtuali.....	61
▫	Affidabilità dei metodi numerici.....	62
○	Le travi: teoria del De Saint-Venant.....	62
▫	Equazioni indefinite di equilibrio applicate alla teoria del De Saint-Venant.....	66
▫	Equazioni ai limiti applicate alla teoria del De Saint-Venant.....	66
▫	Le relazioni tensioni-deformazioni applicate alla teoria del De Saint-Venant.....	67
▫	Criterio di Hencky-von Mises applicato alla trave.....	67
○	Caratteristiche della sollecitazione esterna sulle basi.....	68
○	Caratteristiche della sollecitazione interna sulla generica sezione.....	69
▫	Convenzione sulle caratteristiche della sollecitazione interna.....	70
▫	Esplicitazione delle caratteristiche della sollecitazione interna.....	71
▫	Le caratteristiche della sollecitazione interna e le tensioni.....	71
▫	Conseguenze pratiche del postulato del De Saint-Venant.....	72
▫	Riepilogo da fisica matematica: momenti e assi principali d'inerzia.....	72
○	Sforzo normale centrato.....	74
▫	Stato tensionale.....	74
▫	Stato di deformazione.....	76
○	Flessione retta intorno a z.....	77
▫	Stato tensionale.....	77
▫	Stato di deformazione.....	78
▫	Linea elastica.....	81
▫	Definizione di piano neutro, piano di sollecitazione e piano di flessione.....	82
○	Flessione retta intorno a y.....	83
▫	Stato tensionale.....	83
▫	Stato di deformazione.....	84
○	Flessione deviata.....	85
▫	Formula monomia.....	87
○	Flessione composta (sforzo normale eccentrico).....	88
▫	Formula monomia.....	90
▫	Compressione.....	91

○	Torsione uniforme	91
▫	Caratteristiche della sollecitazione.....	94
▫	Costante di torsione J_T	94
▫	Determinazione della funzione di warping	97
▫	Sezione circolare e corona circolare.....	97
▫	Sezione ellittica.....	98
○	Analogia della membrana.....	99
▫	Sezioni monoconnesse di spessore sottile	101
○	Analogia idrodinamica.....	104
○	Teoria di Bredt per le sezioni biconnesse.....	106
▫	Prima formula di Bredt	106
▫	Seconda formula di Bredt.....	108
▫	Sezioni pluriconnesse di spessore sottile	109
▫	Riduzione del numero di incognite per il problema delle sezioni pluriconnesse.....	111
▫	Esempio di dominio pluriconnesso: il cassone alare	111
▫	Sezioni di spessore sottile con zone aperte e zone chiuse.....	113
▫	Iperstaticità interne di un tronco pluriconnesso.....	114
○	Cedimenti e distorsioni.....	114
▫	Variazione termica a farfalla.....	115
▫	Effetti di cedimenti e distorsioni sulle strutture.....	116
▫	Reazioni, sollecitazioni e deformazioni sulle travi.....	117
○	Taglio	118
▫	Teoria approssimata del taglio puro.....	120
▫	Componente di tensione τ_{xp} : la formula di Jourawski	121
▫	Componente di tensione τ_{xr}	123
▫	Sezione rettangolare	124
▫	Sezione circolare.....	126
▫	Sezioni aperte di spessore sottile	127
▫	Determinazione dei flussi di taglio: esempio qualitativo	130
▫	Determinazione dei flussi di taglio: esempio quantitativo.....	131
▫	Determinazione del centro di taglio.....	133
▫	Sezioni pluriconnesse	134
▫	Deformazione da taglio puro.....	135
○	Teoremi sul lavoro di deformazione.....	137
▫	Applicazione del teorema di Clapeyron.....	137
▫	Teorema di Betti	137
▫	Teorema di Castigliano	138
▫	Teorema di Menabrea	140

Indice – Esercizi

○ I vincoli.....	142
○ Equazioni di equilibrio	143
○ Labilità e iperstaticità	143
○ Centri assoluti e relativi.....	144
▫ Esercizio 1 – reazioni esterne	145
▫ Esercizio 2 – reazioni esterne	147
▫ Esercizio 3 – reazioni esterne	148
▫ Esercizio 4 – reazioni esterne	149
○ Vettore equivalente a una distribuzione generica di carico.....	150
▫ Esercizio 5 – reazioni esterne	151
▫ Esercizio 6 – reazioni esterne	151
▫ Esercizio 7 – reazioni esterne	153
▫ Esercizio 8 – reazioni esterne	154
▫ Esercizio 9 – reazioni esterne	155
○ Principio dei lavori virtuali (PLV).....	155
▫ Esercizio 10 – reazioni con PLV.....	156
▫ Esercizio 11 – reazioni con PLV.....	157
▫ Esercizio 12 – reazioni con PLV.....	158
▫ Esercizio 13 – reazioni con PLV.....	159
○ Convenzione sulle caratteristiche della sollecitazione interna	161
▫ Esercizio 14 – diagrammi delle sollecitazioni	162
▫ Esercizio 15 – diagrammi delle sollecitazioni	163
▫ Esercizio 16 – diagrammi delle sollecitazioni	164
▫ Esercizio 17 – diagrammi delle sollecitazioni	166
▫ Esercizio 18 – diagrammi delle sollecitazioni	167
▫ Esercizio 19 – momento flettente su sezione ad L (principio di Condé).....	169
▫ Esercizio 20 – diagrammi delle sollecitazioni	173
▫ Esercizio 21 – diagrammi delle sollecitazioni	174
▫ Esercizio 22 – diagrammi delle sollecitazioni	175
▫ Esercizio 23 – diagrammi delle sollecitazioni	177
▫ Esercizio 24 – diagrammi delle sollecitazioni	177
▫ Esercizio 25 – diagrammi delle sollecitazioni	179
▫ Esercizio 26 – diagrammi delle sollecitazioni	182
▫ Esercizio 27 – momento torcente su sezione pluriconnessa	184
▫ Esercizio 28 – linea elastica	187
▫ Esercizio 29 – linea elastica	189
▫ Esercizio 30 – linea elastica	190
▫ Esercizio 31 – linea elastica	191
○ Metodo delle integrazioni applicato a travi con discontinuità.....	192
▫ Esercizio 32 – linea elastica con discontinuità.....	192
▫ Esercizio 33 – linea elastica con discontinuità.....	194

○	Schemi notevoli isostatici	196
○	Equazioni di congruenza per la risoluzione di schemi iperstatici	197
▫	Esercizio 34 – schema iperstatico con relazioni di congruenza	198
▫	Esercizio 35 – schema iperstatico con relazioni di congruenza	200
▫	Esercizio 36 – verifica di sezione sottoposta a taglio (Diapason)	202
▫	Esercizio 37 – verifica di sezione sottoposta a taglio (Diapason, altra direzione)	208
▫	Esercizio 38 – centro di taglio su sezione a C	211
▫	Esercizio 39 – Struttura iperstatica	213
▫	Esercizio 40 – Struttura iperstatica	214
▫	Esercizio 41 – Struttura iperstatica	216
▫	Esercizio 42 – Struttura iperstatica (trave continua)	216
▫	Esercizio 43 – Struttura iperstatica	218
▫	Esercizio 44 – Struttura iperstatica con diagramma del momento e deformata	219
○	Teorema dei lavori virtuali	222
○	Formulazione del lavoro virtuale interno nel caso di travi	223
▫	Esercizio 45 – spostamento/rotazione con TLV	225
▫	Esercizio 46 – spostamento/rotazione con TLV	226
▫	Esercizio 47 – spostamento/rotazione con TLV	228
▫	Esercizio 48 – spostamento/rotazione con TLV	229
▫	Esercizio 49 – spostamento/rotazione con TLV	230
▫	Esercizio 50 – spostamento/rotazione con TLV	231
▫	Esercizio 51 – spostamento/rotazione con TLV	233
▫	Esercizio 52 – spostamento/rotazione con TLV	234
▫	Esercizio 53 – struttura iperstatica con TLV	235
▫	Esercizio 54 – struttura iperstatica con TLV	237
▫	Esercizio 55 – struttura iperstatica con TLV	239
▫	Esercizio 56 – struttura iperstatica con TLV	240
▫	Esercizio 57 – struttura iperstatica con TLV	242
▫	Esercizio 58 – struttura iperstatica con Castigliano	244
▫	Esercizio 59 – struttura iperstatica con Castigliano/Menabrea	245
▫	Esercizio 60 – struttura iperstatica con Menabrea	246
▫	Esercizio 61 – verifica di sezione pluriconnessa sottoposta a taglio	247
▫	Esercizio 62 – verifica di sezione sottoposta a sforzo normale eccentrico	253

Teoria

○ Le strutture e i carichi

Le strutture possono essere catalogate in base alle loro caratteristiche, secondo le finalità che esse hanno o rispetto agli obiettivi di durata nel tempo. Un esempio classico è costituito dalle strutture civili, progettate per avere una durata praticamente infinita. Mentre operazioni di manutenzione su queste ultime si effettuano solo quando evidentemente necessarie, non è così per le strutture aeronautiche e in generale aerospaziali: l'ingegnere deve dunque saper stabilire la durata nel tempo che deve avere una data struttura (con "durata" si intende il tempo in cui la struttura opera conservando il 100% della sua affidabilità). Per una struttura che deve decollare, uno dei requisiti più stringenti da soddisfare è certamente il peso (come per gli aerodinamici è l'efficienza). Il vincolo primario del peso deve essere rispettato tenendo in conto una serie di possibili condizioni di carico, cioè tenendo presente che le forze agenti sul nostro sistema possono essere di varia natura. I carichi possono essere:

- statici
- dinamici
- aeroelastici
- aerotermici
- da impatto

Riguardo l'aeroelasticità, quando un corpo, immerso in un flusso, muta la sua forma, ci si aspetta che varino, con ogni probabilità, le forze e la sua deformata in maniera ciclica. Ai fini dello studio, consideriamo i carichi e la deformazione completamente distinti: applicando le forze, la struttura si deforma e apparentemente la deformazione non incide sui carichi stessi. Nella realtà non è così, specialmente nel caso in cui le strutture siano altamente deformabili. Sappiamo infatti dall'aerodinamica che la forma del corpo concorre alla generazione della portanza, perciò se la forma cambia, ne risente anche la portanza e di conseguenza cambiano i carichi in generale. Questi ciclici e stretti rapporti tra forze e deformazioni prendono il nome di fenomeni aeroelastici. Essi sono tipici del mondo aerospaziale, nel quale si lavora principalmente con le forze generate dall'interazione tra fluido e struttura. Certi fenomeni aeroelastici possono essere nocivi per le strutture, come il *flutter* (principale ragione del collasso del Tacoma Bridge), per questo il diagramma delle velocità del velivolo è limitato dall'insorgere dei fenomeni aeroelastici. Inoltre, tutti i velivoli dell'aviazione generale devono dimostrare di non incorrere nel rischio di crisi aeroelastica.

Nell'aereo dei fratelli Wright, la configurazione biplano, primariamente impiegata per massimizzare la portanza, permetteva anche di sviluppare una notevole resistenza alla torsione, grazie ai numerosi elementi verticali interposti fra le ali (che però comportavano anche un aggravio di resistenza). Nei primi esperimenti a singola ala (monoplano), i carichi aerodinamici tendevano a deformare l'ala stessa, fatta di legno e tela, quindi fortemente deformabile, e nel momento in cui interveniva una rotazione delle sezioni dovuta a fenomeni aeroelastici, gli aerei perdevano le ali.

Oltre ai carichi aeroelastici, vi sono ad esempio quelli aerotermici e da rientro. Il velivolo deve essere certificato per atterrare e decollare in qualunque zona del mondo, quindi è importante tener conto, nella progettazione, delle grandi e potenziali escursioni termiche previste dalle norme aeronautiche.

Infine, i carichi da impatto possono essere di natura bellica, se si è oggetto di un attacco, o impatti accidentali, per esempio dovuti a volatili o a detriti sollevati in fase di decollo.

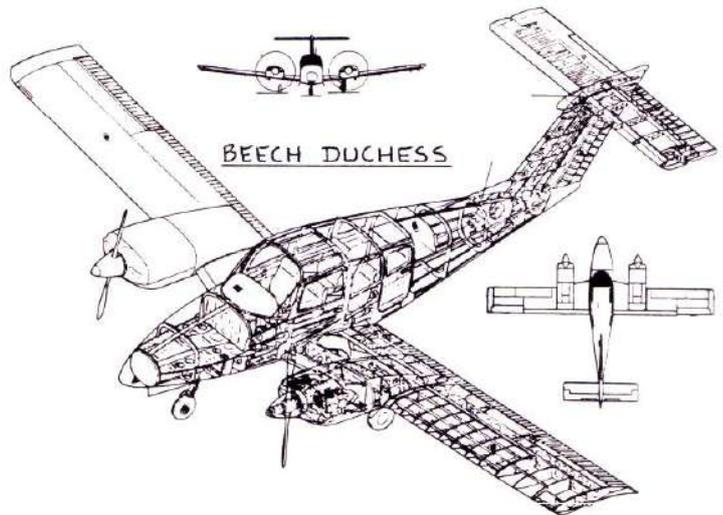
▫ Elementi strutturali principali e secondari

Nel progetto delle strutture occorre scegliere gli elementi strutturali principali; la scelta dell'elemento è basata sulla funzione che esso deve espletare. Alcuni esempi:

BICICLETTA: la bicicletta è formata da tubi, elementi monodimensionali che hanno una funzione primaria. Se eliminiamo uno di quei tubi, viene meno la funzionalità della bicicletta stessa. La scelta del materiale un tempo era univoca e ricadeva sull'acciaio, perché conferiva un buon compromesso tra resistenza meccanica e affidabilità, tuttavia al giorno d'oggi molte biciclette sono prodotte con materiali compositi. In generale le biciclette non presentano elementi secondari.

AUTOMOBILE: osservando automobili datate è possibile anzitutto distinguere il telaio (formato da elementi essenziali) da una parte di forma (costituita da elementi strutturali secondari, alcuni legati anche a funzioni secondarie dell'autovettura, come ad esempio i pannelli che richiudono i volumi, i quali servono a proteggere ciò che c'è all'interno dell'autovettura pur non avendo rilevanza strutturale). Questa filosofia è andata cambiando: la necessità di usare propulsori con consumi sempre più ridotti ha fatto sì che fosse ridotto il numero di parti secondarie. Molte di queste parti adesso sono fondamentali caratteristiche strutturali, basti pensare ai carichi d'impatto. Nel fare i crash test, si verifica che tutta la struttura collabori all'assorbimento dell'energia d'impatto, e questo diventa fondamentale anche in elementi che inizialmente ritenevamo secondari (ad esempio le portiere).

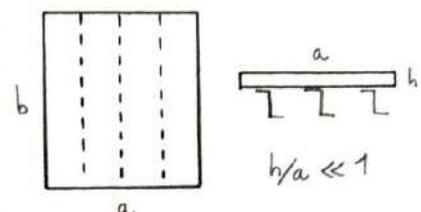
SMART CONCEPT: spesso si parla anche di strutture biocompatibili, formate da una matrice fatta di resina al cui interno sono presenti fibre naturali (canapa, lino ecc.).



▫ Elementi strutturali in un aereo

Prendiamo in considerazione un classico aereo dell'aviazione generale, un Beechcraft. Tutti i velivoli appartenenti alla stessa categoria presentano una serie di elementi comuni, per cui sono molto simili tra loro (si distinguono in pratica per il peso massimo al decollo e quindi per il numero di passeggeri trasportabili). Le grandi differenze si ottengono solo in seguito a grandi rivoluzioni, che spesso però portano con sé moltissimi anni di ricerca e sviluppo in quanto l'ente di certificazione non tarderà a chiedere giustificazione per ogni scelta effettuata. Risulta quindi abbastanza comune ritrovare configurazioni tra loro molto simili. Elenchiamo ora alcuni degli elementi strutturali principali

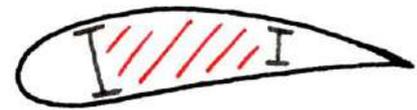
- **Pannelli (Sheet):** servono a delimitare i volumi e a chiudere la struttura. Sono elementi fondamentalmente bidimensionali, cioè



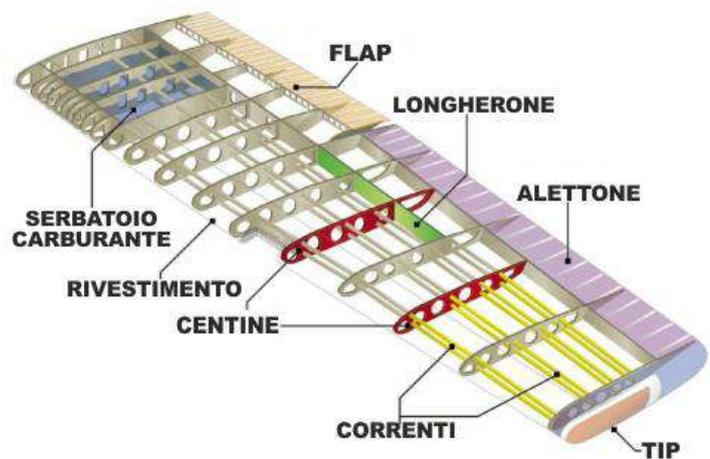
hanno due dimensioni prevalenti (a e b) rispetto allo spessore (h). Il velivolo in esame avrà pannelli di spessore di al più 2-3 millimetri.

- *Correnti* (Stringers): sono elementi monodimensionali, molto piccoli, applicati lungo i pannelli stessi. Questi ultimi, infatti, resistono bene quando vengono tesi, ma se su di loro si applica uno sforzo di compressione, tendono ad imbozzarsi. Disponendo i correnti lungo i pannelli si risolve questo problema.

- *Cèntine* (Ribs): sono elementi praticamente monodimensionali perpendicolari all'apertura alare. La loro sezione può ad esempio essere una Z , una C , una I e così via. Anch'esso ha spessori confrontabili con h .



- *Longheroni* (Frames): lungo l'apertura dell'ala, per conferirle rigidità, si trovano una serie di intercostali. Guardando l'ala in sezione notiamo il longherone anteriore e quello posteriore. La parte che congiunge il longherone posteriore e quello anteriore è proprio la nostra centina, molto resistente e strutturalmente "interessante". La parte del bordo d'attacco e d'uscita non contribuisce particolarmente alla resistenza meccanica, anzitutto per ragioni di natura impiantistica (sono presenti meccanismi per il movimento delle superfici aerodinamiche). Questa sorta di scatola strutturale va a costituire la nostra ala e questa metodologia si ripete anche per la fusoliera (L'ossatura diventa circolare).



▫ Scelta del materiale e delle tecniche costruttive

Costruire una geometria può comportare una serie di scelte tutt'altro che facili, come il materiale da utilizzare, le tecniche di assemblaggio e di manufacturing.

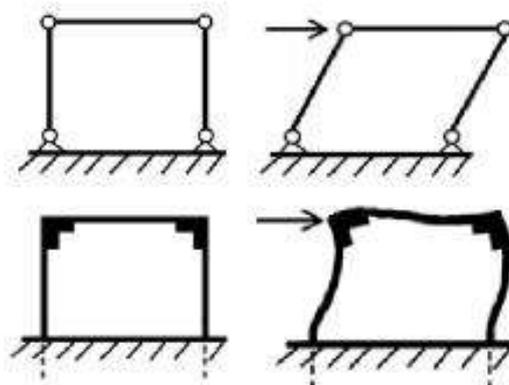
In aeronautica si è cominciato a lavorare con strutture di legno e tela, per poi passare ai metalli, fino ad arrivare alle attuali leghe di alluminio. In particolare, due leghe di alluminio hanno fatto la storia dell'aeronautica, cioè la 2024 – T3 e 7075 – T6. Esse hanno caratteristiche differenti in termini di elementi alliganti, cioè di termini che entrano nella formazione della lega. T3 e T6 indicano delle caratteristiche di tempra, ovvero identificano i trattamenti che ha subito la lega (Argomenti che verranno trattati nel corso di tecnologie dei materiali). È evidente che scegliere un materiale piuttosto che un altro ha una certa rilevanza e condiziona la funzionalità degli elementi. La scelta delle leghe citate prima è dettata dalla loro elevata efficienza meccanica. Infatti, misurando la rigidità e la tenacia meccanica rispetto al peso (tramite strumenti che definiremo in seguito) ci accorgiamo che in particolare le due leghe di alluminio 2024 – T3 e 7075 – T6 hanno caratteristiche brillanti. In realtà l'acciaio e il titanio hanno caratteristiche meccaniche anche migliori, ma hanno un peso maggiore e sono più difficili da lavorare. Per ottenere una trave a C , possiamo ad esempio lavorare una lamiera in due modi: per piegatura, che però può risultare difficile per spessori elevati e di solito determina spigoli arrotondati e non esattamente della geometria che ci aspettiamo, oppure per estrusione, che di solito comporta lo spreco di molto materiale e trascina con sé una serie di problemi dovuti all'imprecisione degli strumenti.

A tutto questo si aggiunge il problema dell'interconnessione degli elementi: posso ad esempio scegliere se incollarli, saldarli, rivettarli. La bicicletta è di solito saldata; a distanza di molti anni di utilizzo si potrebbero avvertire delle vibrazioni, sintomo del fatto che alcune saldature stanno lentamente cedendo, essendo chiaramente soggette a fenomeni di tenso-corrosione (che fanno decadere le proprietà meccaniche delle giunzioni). Ricordiamo inoltre che i materiali si degradano non solo per effetto di una sollecitazione elevata, ma anche per effetto dei cicli di carico. Nonostante in aeronautica le saldature non siano le stesse usate per le biciclette o le autovetture, è ovviamente necessario che esse resistano agli agenti atmosferici: è inammissibile che le proprietà degli aerei decadano a seconda del luogo di utilizzo.

Osservazione: in generale, le travi utilizzate non sono fatte di materiale continuo, ma sono cosparse di fori per ridurre la quantità di materiale e alleggerire la struttura. Per fortuna, nello studio che affronteremo, le nostre travi non saranno così complesse.

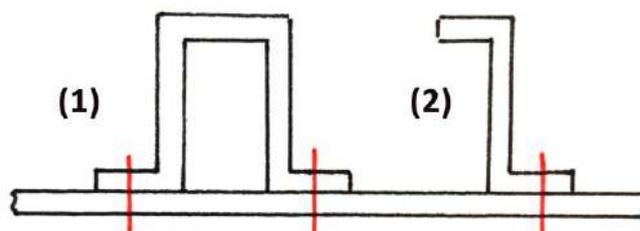
▫ Giunzioni e vincoli

Graficamente, attraverso le cerniere, abbiamo voluto rappresentare la possibilità che un elemento strutturale ruoti rispetto ad un altro. Evidentemente noi continueremo a ragionare con configurazioni che avranno cerniere e incastri, ma dobbiamo cominciare ad avere la sensibilità che la scelta della condizione di vincolo non sia dettata dalla "necessità di risolvere un esercizio", bensì si tratti di una scelta strutturale. I due schemi a lato differiscono per le condizioni di vincolo. In alcuni casi la configurazione in basso è molto più prossima alla



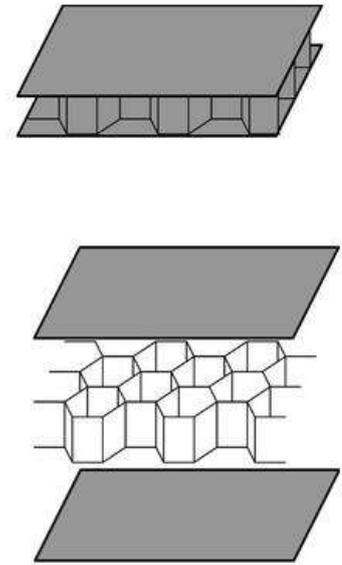
situazione reale. Negli incastri non è ammessa la rotazione reciproca degli elementi, quindi essi si deformano, e non possiamo più ipotizzarli infinitamente rigidi, come abbiamo fatto fino ad ora. Nella configurazione in alto, la rotazione è ammessa, quindi ci rendiamo conto che essa è cedevole, e si tratta di una situazione critica per noi. Ovviamente esistono infinite configurazioni intermedie, oltre quelle in figura. Posso pensare di irrigidire la struttura utilizzando elementi che ad esempio resistano solo alla trazione (cavo d'acciaio) oppure possiamo sovrapporre elementi strutturali, mettendo due funi lungo le due diagonali e in tal caso esse entreranno in funzione a seconda del verso di applicazione della forza esterna. Lo svantaggio è che così facendo aggiungo elementi in più e ciò appesantisce l'intera struttura.

Anche la scelta della forma dei longheroni porta a vantaggi e svantaggi. Scegliendo la (1), ad esempio, posso immaginare di avere una maggiore resistenza alla torsione e una maggiore facilità di produzione. Questa soluzione può essere bocciata per vari motivi: per congiungere il longherone al pannello necessita di due elementi di collegamento, rispetto alla configurazione (2) che ne richiede uno soltanto. Potrei inoltre avere problemi di ingombro, ed infine è presente una parte del pannello sottostante che è coperta dalla geometria e quindi non è ispezionabile. Facendo operazioni di manutenzione ordinaria non posso visualizzare immediatamente quella parte di pannello (a meno di smontare completamente l'aereo o trovare tecniche di ispezione non invasive), il che può essere un gravissimo problema.



▫ **Strutture sandwich**

Possiamo usare anche delle strutture “sandwich”, formate da due pannelli e un elemento intermedio che serve per creare distanza tra le due facce e per conferire rigidità al taglio, cioè allo scorrimento relativo delle due lamiere. Queste configurazioni sono ottime per creare spessori senza far crescere eccessivamente il peso strutturale. Il principale svantaggio è l’ispezione, impossibile senza disassemblare il sandwich stesso. Moltissime strutture di questo tipo vengono usate per i piani di coda ed è sufficiente una piccola quantità di vapore d’acqua inglobata in una cella per far sì che in quota, essa prima condensi e poi congeli. Il ghiaccio come sappiamo ha un volume maggiore rispetto all’acqua liquida, che quindi può rompere la struttura a nido d’ape compromettendone la funzionalità.



○ **Forze di volume e forze superficiali**

Possiamo classificare le forze agenti su un corpo come in tre categorie: forze di volume, forze superficiali e forze concentrate. Ogni forza rispetta la legge di Newton:

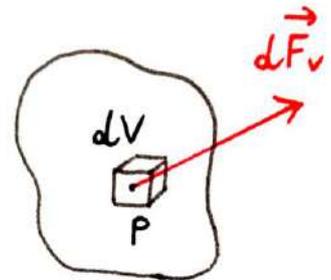
$$d\vec{F} = \vec{a} \cdot dm$$

- Tra le **forze di volume** figurano gli effetti di gravità, le forze di inerzia, le forze centrifughe. Siamo propensi a ragionare sul fatto che queste forze dipendano dal volume o siano associate al volume del nostro corpo. Dato che nell’espressione della Legge di Newton il volume non compare, per evitare confusione, chiameremo forze di volume quelle definite nell’ambito di questa notazione:

$$\frac{d\vec{F}_V}{dV} = \vec{b} = \frac{[F]}{[L]^3}$$

Come indicato tra parentesi quadre, si tratta dimensionalmente di forze su lunghezze al cubo. Sul nostro corpo agirà, nel generico punto P (al quale associamo un volumetto dV), una forza $d\vec{F}_V$ che è data da:

$$d\vec{F}_V = \vec{b} \cdot dV$$

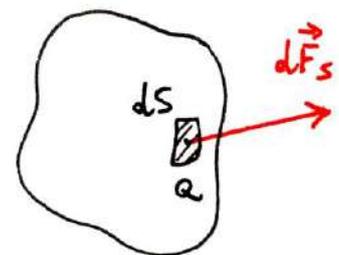


- In maniera del tutto analoga possiamo definire delle **forze superficiali**, associate alle azioni di contatto, come lo sono ad esempio le forze d’attrito oppure la forza aerodinamica. Sull’areola elementare dS chiamiamo $d\vec{F}_S$ il vettore elementare agente sulla superficie, il quale rapportato all’areola dS ci restituisce la forza superficiale che chiamiamo \vec{p} . Dimensionalmente si tratta di una forza su lunghezza al quadrato, cioè coincide con quella che noi chiamiamo pressione:

$$\frac{d\vec{F}_S}{dS} = \vec{p} = \frac{[F]}{[L]^2}$$

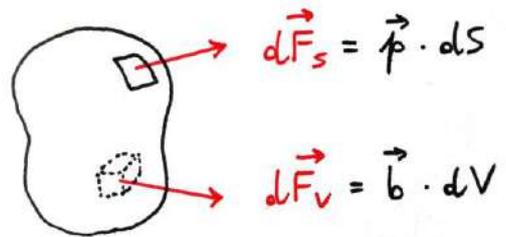
Sull’elementino dS associato al punto Q agirà una forza $d\vec{F}_S$ data da:

$$d\vec{F}_S = \vec{p} \cdot dS$$



Osservazione: i generici vettori \vec{b} e \vec{p} saranno identificati dalle loro 3 componenti:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

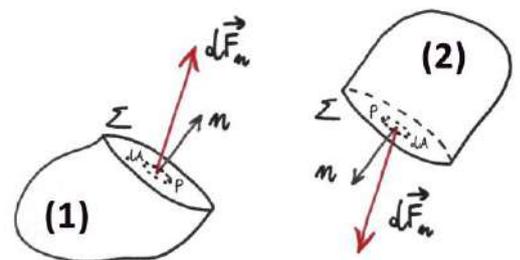


- Ultima classe di forze che possono agire nel nostro sistema sono le **forze concentrate**. Si tratta di una pura idealizzazione, in quanto sono frutto di un processo al limite (nella realtà non esistono forze concentrate). Quando il dominio di riferimento è sempre più piccolo fino a diventare infinitesimale, invece che descrivere il sistema di forze con una distribuzione spaziale (superficiale o di volume) risulta più conveniente rappresentare la forza mediante la sola risultante. In tal caso la forza avrà solo le dimensioni di una forza.

▫ Corpi in equilibrio e caratterizzazione del sistema di forze interne

Se il nostro corpo è in equilibrio, per esso devono valere le equazioni cardinali della statica, le quali ci dicono che la risultante di tutte le forze agenti e la risultante dei momenti di queste forze dev'essere nulla, cioè $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M} = \vec{0}$.

Quindi, se un generico corpo su cui agiscono delle forze superficiali e di volume è in equilibrio, allora suddividendolo in due parti, per ciascuna di esse non varranno più le relazioni di partenza. Prima del taglio c'era un'azione che si esplicava lungo la superficie Σ (che abbiamo identificato nel momento che abbiamo sezionato il corpo). Tale azione è mutua, cioè il sistema di forze che agisce sulla faccia Σ appartenente alla parte 1 dev'essere uguale e contrario al sistema di forze che agisce sempre sulla faccia Σ ma se la consideriamo appartenente alla parte 2 del solido. Queste "forze interne" devono quindi essere tali da elidersi perfettamente (stesso modulo, stessa direzione e verso opposto).



Consideriamo sulla nostra sezione Σ un elemento superficiale dA associato ad un punto della superficie che chiamiamo P . Per quell'elemento di superficie dA possiamo trovare una normale uscente n , la quale è immediatamente identificata dalle sue tre componenti, cioè i coseni direttori:

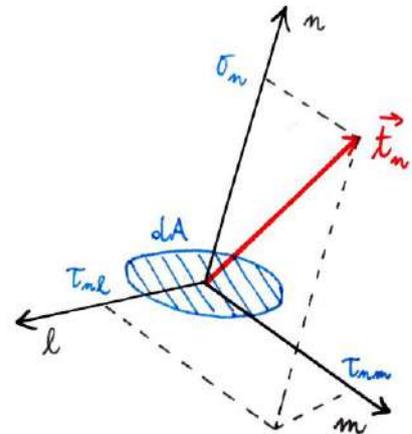
$$n = \begin{bmatrix} \alpha_{nx} \\ \alpha_{ny} \\ \alpha_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos n_x \\ \cos n_y \\ \cos n_z \end{bmatrix}$$

Sull'areola dA agirà una forza interna che abbiamo denominato $d\vec{F}_n$, che è funzione di 6 quantità, cioè le tre coordinate spaziali (che identificano un punto P) e i tre coseni direttori (che identificano univocamente la sezione Σ e quindi la normale uscente). In simboli: $d\vec{F}_n = f(x, y, z, \alpha_{nx}, \alpha_{ny}, \alpha_{nz})$.

Si definisce *vettore tensione* un particolare vettore superficiale dato da:

$$\vec{t}_n = \frac{d\vec{F}_n}{dA} = \frac{[F]}{[L]^2}$$

Chiaramente esso avrà le dimensioni di una forza per unità di superficie, quindi di una pressione. Questo vettore si porta dietro le stesse proprietà della forza elementare da cui deriva, e quindi anch'esso è funzione del punto dello spazio e della giacitura, cioè $\vec{t}_n = f(x, y, z, \alpha_{nx}, \alpha_{ny}, \alpha_{nz})$. Concentriamo ora la nostra attenzione su una specifica areola dA associata al punto P dello spazio e identifichiamo la normale uscente n . Possiamo identificare immediatamente una terna di assi l, m, n ortonormale e levogira. Abbiamo quindi costruito una terna locale. Nel punto P possiamo inoltre porre il vettore \vec{t}_n , caratterizzato da una propria orientazione nello spazio. Ricordiamo che l ed m giacciono nel piano dell'areola dA . Possiamo pensare di decomporre il vettore tensione rispetto alla terna locale. Dato che \vec{t}_n dipende dalla giacitura, ci risulta conveniente caratterizzare il vettore tensione rispetto ad una terna che sia solidale all'areola dA .



Proiettando il vettore \vec{t}_n lungo i tre assi e nel piano lm , otteniamo:

- $\bar{\tau}_n$ proiezione di \vec{t}_n nel piano lm
- σ_n proiezione di \vec{t}_n lungo la direzione n , ovvero $\sigma_n = \vec{t}_n \cdot \vec{\alpha}_n$
- τ_{nl} proiezione di \vec{t}_n (o equivalentemente di $\bar{\tau}_n$) lungo la direzione l , ovvero $\tau_{nl} = \vec{t}_n \cdot \vec{\alpha}_l$
- τ_{nm} proiezione di \vec{t}_n (o equivalentemente di $\bar{\tau}_n$) lungo la direzione m , ovvero $\tau_{nm} = \vec{t}_n \cdot \vec{\alpha}_m$

La quantità σ_n che abbiamo appena definito è uno scalare che chiamiamo *tensione normale* e in particolare sarà una tensione normale di *trazione* se $\sigma_n > 0$, oppure di *compressione* se $\sigma_n < 0$. Invece τ_{nl} e τ_{nm} vengono denominate *tensioni tangenziali*, perché giacciono nel piano e sono associate alle sollecitazioni che chiameremo "di taglio". Per il modo in cui abbiamo definito queste quantità, valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{t}_n = \sigma_n \vec{\alpha}_n + \tau_{nl} \vec{\alpha}_l + \tau_{nm} \vec{\alpha}_m \quad ; \quad \bar{\tau}_n = \tau_{nl} \vec{\alpha}_l + \tau_{nm} \vec{\alpha}_m \quad ; \quad \tau_n = \sqrt{\tau_{nl}^2 + \tau_{nm}^2}$$

o Tensore delle tensioni

Cambiamo ora i nostri sistemi di riferimento. Scegliamo tra tutte le possibili giaciture quella per cui $n \equiv x$ e di conseguenza dA appartiene al piano yz , l coincide con y , m coincide con z : possiamo definire un vettore tensione le cui componenti saranno $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$. Analogamente possiamo ripetere queste considerazioni immaginando però che la normale uscente coincida dapprima con l'asse y e poi con z . Ad esempio, nel secondo caso identifichiamo le tre componenti $\sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}$. In realtà nello scrivere in questo modo commettiamo un errore, poiché dovendo rispettare l'ordine delle componenti (prima quella lungo x , poi quella lungo y e infine quella lungo z), esse andranno scritte nel seguente modo:

$$\text{Normale } x: \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad \text{Normale } y: \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{Normale } z: \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \sigma_z \end{Bmatrix}$$

Queste vengono di solito dette *componenti speciali di tensione* perché invece che essere espresse rispetto ad l, m, n , sono espresse rispetto a tre direzioni a noi familiari, quelle del nostro sistema di riferimento x, y, z .

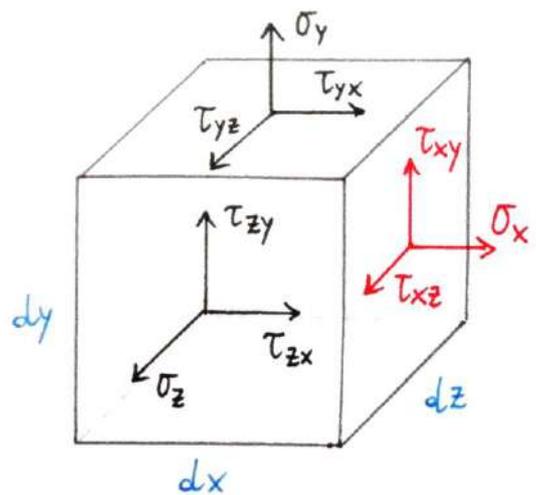
Con questo sistema di riferimento, le generiche σ_i (e analogamente le τ_{ij}) sono funzione solo dello spazio e non c'è dipendenza dai coseni direttori.

Abbiamo caratterizzato in maniera completa lo stato tensionale nel punto Q , infatti ne conosciamo le componenti secondo tre piani tra loro ortogonali e quindi potremo esprimere tale tensione lungo una qualunque direzione e qualunque piano. Disegniamo un volumetto a forma di cubo con le facce di normali uscenti x , y e z (si tratta quindi di un cubetto con gli spigoli paralleli al sistema di riferimento). Su ciascuna delle tre facce visibili identifichiamo le tre componenti di tensione. Bisognerebbe fare lo stesso ragionamento sulle facce nascoste, ma nel momento in cui conosciamo queste nove componenti, in realtà abbiamo già conoscenza piena della tensione. Infatti, se il volume è molto piccolo, le 9 componenti caratterizzano anche le altre tre facce e forniscono tutte le informazioni di tensione di cui abbiamo bisogno. Per buona parte dei nostri ragionamenti faremo riferimento a quello che si chiama *tensore delle tensioni* o *tensore degli sforzi*, definito come segue:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Nota: per ricordare la posizione spaziale delle componenti, si noti che la prima lettera indica la direzione normale alla faccia su cui sono applicate, la seconda indica la direzione. Ad esempio, τ_{xy} è la tensione tangenziale sulla faccia di normale x , in direzione y . Per lo stesso motivo, talvolta le σ_i sono indicate con σ_{ii} .

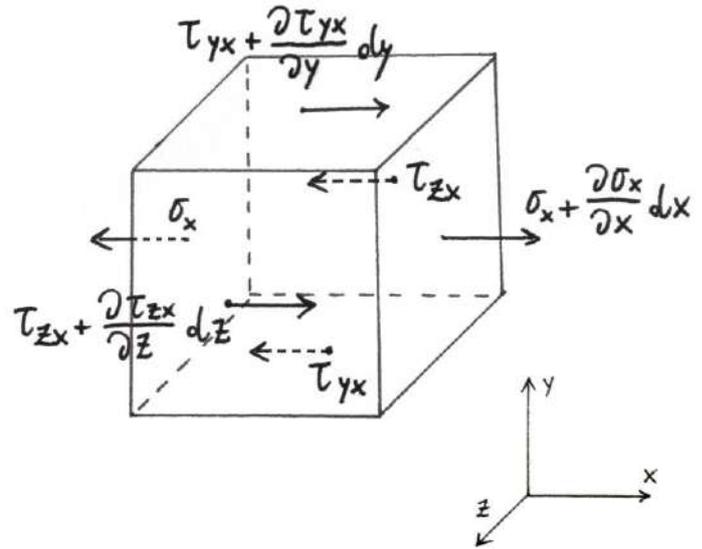
Negli esercizi ci verranno fornite le forze esterne e una parte del nostro compito sarà calcolare queste grandezze, e quindi esplicitare il tensore degli sforzi. Ad un certo punto del corso capiremo che i materiali hanno una resistenza meccanica legata ai valori che assumono le componenti della tensione al loro interno: esistono dei numeri "limite" e nel momento in cui per effetto dei carichi esterni, il nostro sistema meccanico presenta dei valori del tensore degli sforzi molto elevati e prossimi ai valori limite, il corpo si distrugge. Sottoponendo a trazione un oggetto nei limiti in cui esso è in grado di opporsi alla nostra azione meccanica con il sistema di forze interne di coesione, esso resisterà (magari subendo deformazioni che possono essere addirittura permanenti). A noi serve conoscere il tensore degli sforzi per fare un dimensionamento delle strutture, stabilendo quanto sono capaci di resistere alle sollecitazioni esterne.



Equazioni indefinite dell'equilibrio

Facciamo altre considerazioni sull'equilibrio del cubetto analizzato in precedenza. Per semplicità, iniziamo a considerare solo le componenti lungo la direzione x . Sulle facce nascoste agiranno gli sforzi σ_x, τ_{yx} e τ_{zx} .

Poiché le distanze tra facce opposte sono dx, dy e dz , possiamo eseguire degli sviluppi in serie di Taylor arrestati al primo ordine (trascurando tutti gli infinitesimi di ordine superiore perché ipotizziamo che il volumetto abbia dimensioni infinitesime) e trovare le componenti lungo x del tensore sulle facce visibili, come in figura.



Se il nostro sistema è in equilibrio, deve risultare che il sistema di forze su esso agente ha risultante nulla. Andiamo a scrivere tale sistema di forze:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x\right) dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy - \tau_{yx}\right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz - \tau_{zx}\right) dy dx + X dx dy dz = 0$$

Abbiamo indicato con X le forze di volume. Ricordiamo che per rendere l'equazione consistente abbiamo moltiplicato le quantità tra parentesi, che sono dimensionalmente forze per unità di superficie, per le altre due dimensioni del cubetto (X è ovviamente una forza per unità di volume). Abbiamo ottenuto la prima delle tre relazioni. Semplificando:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + X dx dy dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Ripetendo il ragionamento per le altre direzioni, si ottiene un totale di tre equazioni, qui riportate:

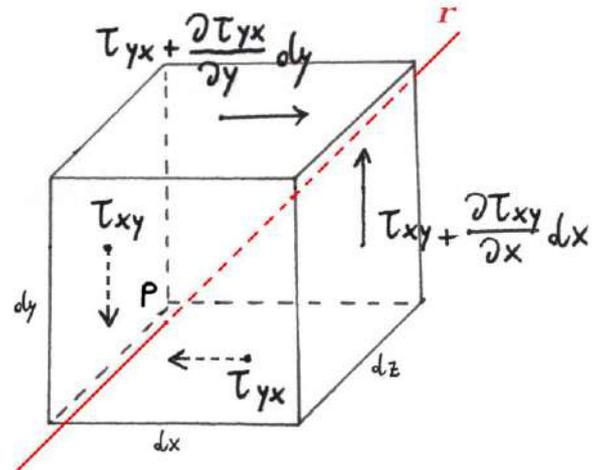
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni vengono dette *equazioni indefinite dell'equilibrio* e costituiscono un sistema di equazioni differenziali. Ovviamente per essere ben posto, un problema differenziale deve possedere delle condizioni al contorno, quindi dovrà esistere un modo per ottenere una relazione che legni lo stato tensoriale con le forze di superficie, cioè con le azioni al contorno.

Osservazione: alcuni testi riportano una notazione differente, per esempio indicando ρX al posto di X (e così via per le altre direzioni), il che significa che si stanno utilizzando forze per unità di massa e non per unità di volume. Noi non scriveremo ρ perché utilizzeremo sempre forze per unità di volume. Notiamo inoltre che le equazioni scritte poco fa sono corrette da un punto di vista dimensionale perché le σ e le τ sono forze per unità di superficie e sono derivate rispetto ad una lunghezza, quindi sono anch'esse forze per unità di volume.

▫ **Simmetria del tensore degli sforzi**

Disegniamo un volume elementare di dimensioni dx, dy e dz , indicando lo spigolo nascosto con P . Vogliamo analizzare lo stato tensionale in un intorno dx, dy, dz del punto P , tracciando le componenti della tensione che contribuiscono alle eventuali rotazioni rispetto ad un asse r parallelo a z e che sia baricentrico, quindi che passi per il centro delle facce di dimensioni dx, dy (quella anteriore e quella posteriore). Individuiamo le componenti della tensione che possono darci rotazione rispetto all'asse r . Sulla faccia (non visibile) di normale uscente x , tale componente è quella lungo y , cioè τ_{xy} , mentre su quella opposta, poiché ci spostiamo di una quantità infinitesimale dx , la componente è $\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$. Analogamente, sulle facce superiore e inferiore troviamo rispettivamente $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$ e τ_{yx} , come rappresentato in figura. Scriviamo l'equilibrio alla rotazione rispetto ad r , considerando tutte le componenti in termini di momento (quindi moltiplichiamo per i rispettivi bracci):



$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{xy} dy dz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

Osservazione: abbiamo scelto i segni dei vari termini considerando positive le rotazioni in senso antiorario.

Nell'equazione appena scritta, alcuni termini sono infinitesimi di ordine superiore (dx^2 e dy^2), quindi possono essere trascurati. Facendo le dovute semplificazioni, si arriva al risultato:

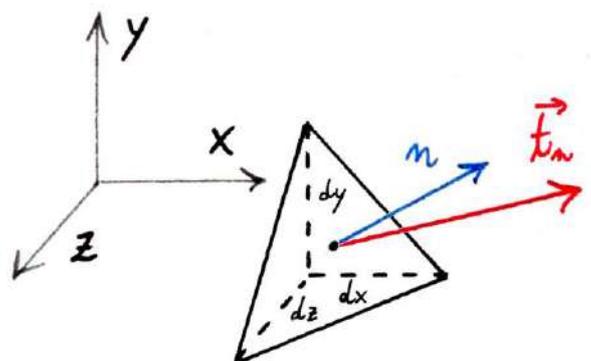
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Lo stesso ragionamento si può ripetere per assi paralleli alla direzione x oppure y , ottenendo relazioni del tutto analoghe. Il tensore degli sforzi è dunque simmetrico:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

▫ **Equazioni di Cauchy ed equazioni ai limiti**

Nel suddividere il nostro solido in volumetti elementari di dimensioni dx, dy, dz , ne consideriamo uno che sia prossimo alla superficie esterna. Tale volume elementare non sarà più un parallelepipedo, bensì un tetraedro (vedi figura). Infatti, quando vogliamo considerare la superficie esterna di un dominio, il piano tangente è l'entità geometrica del più piccolo ordine che meglio approssima quella superficie in quell'intorno. Per fare un esempio più semplice, supponiamo di voler rappresentare una curva in un intorno di un punto P tramite una retta. Se essa interseca la curva in punti che precedono e seguono P , ne otteniamo un'approssimazione (più o meno scadente). Esiste però una retta, la tangente (quella per cui i due punti intercettati sulla curva coincidono), che è l'ente



geometrico che meglio rappresenta la curva in quell'intorno. Questo è il lavoro che svolge lo sviluppo in serie di Taylor: fissato un punto di coordinate x_0, y_0, z_0 , possiamo, nell'intorno di tale punto, descrivere qualunque funzione, per quanto complicata, attraverso uno sviluppo in serie arrestato al primo ordine. Nel piano, ciò equivale ad una retta, mentre nello spazio, lo sviluppo arrestato al primo ordine restituirà il piano tangente.

Il tetraedro individua una superficie piana, a cui è associata una normale uscente n . Possiamo definire, nell'intorno del punto P , un vettore tensione \vec{t}_n , facilmente esprimibile attraverso il tensore degli sforzi $[\sigma]$. Ricordiamo infatti che il tensore degli sforzi esprime le tensioni lungo tre piani tra loro ortogonali, il che ci consente di esprimere il vettore tensione lungo una qualunque direzione. Esso si può infatti ricavare mediante il seguente prodotto scalare:

$$[\sigma] \cdot \vec{n} = \vec{t}_n$$

Ciò è equivalente a proiettare il tensore lungo la direzione \vec{n} . Scrivendolo in termini di componenti, se ad \vec{n} associamo i coseni direttori $\alpha_{nx}, \alpha_{ny}, \alpha_{nz}$, il risultato è il seguente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{nx} \\ \alpha_{ny} \\ \alpha_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{bmatrix}$$

Queste sono note come *equazioni di Cauchy*. A questo punto possiamo ottenere anche quelle che si chiamano *equazioni ai limiti*. Avendo già espresso l'equilibrio per un elemento di volume interno al corpo, dobbiamo ora riscrivere la medesima condizione di equilibrio lungo le direzioni x, y, z , ma questa volta per il contorno, su cui agiscono le forze di superficie, di componenti p_x, p_y, p_z . Ciò significa che bisogna semplicemente scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} t_{nx} = p_x \\ t_{ny} = p_y \\ t_{nz} = p_z \end{cases}$$

Esplicitando le relazioni appena scritte in forma compatta:

$$\begin{cases} \sigma_x \alpha_{nx} + \tau_{xy} \alpha_{ny} + \tau_{xz} \alpha_{nz} = p_x \\ \tau_{yx} \alpha_{nx} + \sigma_y \alpha_{ny} + \tau_{yz} \alpha_{nz} = p_y \\ \tau_{zx} \alpha_{nx} + \tau_{zy} \alpha_{ny} + \sigma_z \alpha_{nz} = p_z \end{cases}$$

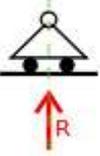
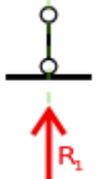
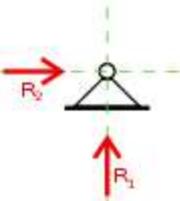
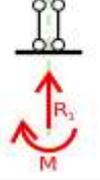
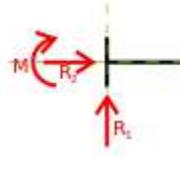
Queste vengono dette *equazioni ai limiti*. Ricordiamo che p_x, p_y, p_z sono noti, mentre ci restano invece da determinare le σ_i e le τ_{ij} , e quindi abbiamo 6 funzioni incognite (solo 6 perché precedentemente abbiamo dimostrato che il tensore è simmetrico).

Questo tipo di problema differenziale ammette infinite soluzioni, dette *soluzioni equilibrate* o *staticamente ammissibili*. Sono infinite perché in realtà abbiamo sviluppato questa scrittura come se il corpo fosse infinitamente rigido: in nessuna delle nostre considerazioni è entrata in gioco la deformabilità del corpo. Il problema è quindi staticamente indeterminato. Notiamo inoltre che in un corpo infinitamente rigido, parlare di stato tensionale non ha molto senso, quindi per ottenere un'unica soluzione per il sistema, dobbiamo rimuovere la condizione di corpo non deformabile, nonché rispettare alcune condizioni di congruenza, di cui si parlerà più avanti.

Esercizi

o I vincoli

I vincoli si suddividono in semplici, doppi o tripli a seconda della loro capacità di sopprimere una o più componenti di spostamento (rotazione o traslazione) alla trave nel punto in cui è inserito. La seguente tabella sintetizza i vincoli piani:

	Simbolo	Nome	Componente soppressa	Indicazioni sul centro di rotazione
Vincolo semplice		Carrello	Traslazione nella direzione dell'asse	Deve appartenere alla retta descritta dall'asse del vincolo
		Pendolo	Traslazione nella direzione dell'asse	Deve appartenere alla retta descritta dall'asse del vincolo
		Doppio pendolo	Rotazione	Deve essere un punto improprio (all'infinito)
Vincolo doppio		Cerniera	Traslazione nella direzione dell'asse Traslazione nella direzione perpendicolare all'asse	Coincide con il punto in cui si trova il vincolo
		Doppio pendolo	Traslazione nella direzione dell'asse Rotazione	È il punto improprio (all'infinito) appartenente alla retta descritta dall'asse del vincolo
Vincolo triplo		Incastro	Traslazione nella direzione dell'asse Traslazione nella direzione perpendicolare all'asse Rotazione	Non esiste

Nella tabella, come si può osservare, sono state inserite anche le relative reazioni vincolari e sono state fornite indicazioni per definire i centri di rotazione assoluti e relativi delle travi collegate ai vincoli (questi aspetti verranno chiariti in seguito). Si può osservare come un vincolo semplice identifichi una condizione di

appartenenza del centro di rotazione ad una retta, un vincolo doppio lo individui univocamente, e un vincolo triplo fornisca informazioni sulla sua inesistenza.

Prima di procedere a qualsiasi tipo di analisi della trave o del sistema di travi, è necessario fare alcune valutazioni sui vincoli a cui è sottoposta. Definiamo il *grado di vincolo* n della trave o del sistema di travi il numero di vincoli semplici in cui i vincoli possono essere scomposti. Per comprendere quanto detto bisogna considerare che ogni vincolo doppio può essere scomposto in due vincoli semplici, e il vincolo triplo in tre vincoli semplici. Ad esempio, una cerniera può essere sostituita da due carrelli (o pendoli) non paralleli concorrenti nello stesso punto; un doppio pendolo può essere sostituito da due pendoli (o carrelli) paralleli e posti a distanza infinitesima; un incastro può essere sostituito da tre pendoli (o carrelli), due a formare un doppio pendolo e l'altro in direzione non parallela.

Il grado di vincolo, dunque, può essere facilmente calcolato tenendo a mente la distinzione tra vincoli semplici, doppi e tripli. Esso rappresenta le componenti di spostamento che l'insieme dei vincoli applicati sono potenzialmente in grado di sopprimere.

○ Equazioni di equilibrio

Una struttura è in equilibrio se e solo se è in equilibrio ogni sua parte costituente (tronchi e vincoli), cioè se sono rispettate, per ogni elemento della struttura, le equazioni cardinali della statica: $\underline{R} = \underline{0}, \underline{M} = \underline{0}$.

Nel caso piano, queste equazioni vettoriali equivalgono a 3 equazioni scalari. Per scrivere le equazioni di equilibrio di una struttura bisogna anzitutto considerare isolate tutte le sue parti costituenti e sostituire i vincoli esistenti con le rispettive reazioni vincolari incognite. Il numero di equazioni di equilibrio m nel piano è dato dalla seguente relazione:

$$m = 3M + 2N$$

Dove M è il numero di corpi rigidi (tronchi) ed N è il numero di punti materiali costituenti la struttura. Le reazioni vincolari incognite saranno ovviamente in numero pari al grado di vincolo n . Si ottiene così un sistema di m equazioni in n incognite.

○ Labilità e iperstaticità

Detto r il rango della matrice dei coefficienti del sistema lineare formato dalle equazioni dei vincoli, si dice *grado di labilità* il numero l dato dalla seguente relazione:

$$l = m - r$$

Una struttura si dirà l volte labile se essa possiede l gradi di libertà residui. Si dice *grado di iperstaticità* il numero i dato dalla seguente relazione:

$$i = n - r$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni appena definite si ottiene:

$$m - n = l - i$$

Questa relazione è utile perché essendo m ed n noti immediatamente guardando la struttura, basterà conoscere il grado di labilità l per ottenere il grado di iperstaticità i e viceversa. Per conoscere direttamente l ed i bisognerebbe calcolare il rango della matrice dei coefficienti. È possibile, tuttavia, valutare i gradi di

libertà residui della struttura e conseguentemente calcolare i conoscendo m, n ed l . Nel caso delle strutture bidimensionali è possibile determinare l una volta individuati i *centri assoluti e relativi*.

Noti l ed i , le strutture vengono così classificate:

- Isostatiche $l = 0, i = 0$
- Iperstatiche (i volte) $l = 0, i > 0$
- Labili determinate (l volte) $l > 0, i = 0$
- Labili indeterminate $l > 0, i > 0$

○ Centri assoluti e relativi

Data una generica struttura costituita da uno o più elementi, i *centri assoluti* sono quelli fissati dai vincoli esterni (secondo le regole elencate nella tabella iniziale), i *centri relativi* sono quelli fissati dai vincoli interni.

Affinché la struttura sia isostatica, condizione necessaria è il numero di gradi di libertà eguali al numero di grado di vincolo, e ciò è intuibile perché i vincoli devono sicuramente essere in numero necessario per evitare labilità. La condizione diventa anche sufficiente se tutti i vincoli sono *efficaci*, cioè se nessuno dei vincoli esercita reazioni già esercitate da altri vincoli. Per verificare questa condizione utilizziamo il *primo teorema delle catene cinematiche*. Il teorema sostiene che un sistema sia labile qualora i due centri assoluti di rotazione di due travi siano allineati col loro centro relativo.

Analizziamo per prima cosa il caso di un singolo corpo rigido nel piano, il quale ha ovviamente tre gradi di libertà. Le possibilità relative ai vincoli sono le seguenti:

- **Il grado di vincolo è inferiore a 3 ($n < 3$)**
 - La struttura è sicuramente labile.
- **Il grado di vincolo è pari a 3 ($n = 3$)**
 - Se il sistema possiede un centro di rotazione, allora sarà labile. Esempio: una trave con cerniera all'estremità sinistra ed un carrello con asse coincidente con la trave a destra. In questo caso il centro di rotazione è in corrispondenza della cerniera, perché coincide col centro di rotazione del vincolo cerniera e con uno degli infiniti centri di rotazione del vincolo carrello;
 - Se il sistema non possiede alcun centro di istantanea rotazione, allora la struttura sarà isostatica. I vincoli sono in numero e disposizione tale da escludere ogni cinematico e le equazioni di equilibrio bastano a individuare le reazioni vincolari. Riprendendo l'esempio precedente, basta sostituire il carrello con uno che abbia l'asse perpendicolare alla trave: i centri di rotazione dei due vincoli non coincidono, e non ci saranno cinematici.
- **Il grado di vincolo è superiore a 3 ($n > 3$)**
 - Bisogna valutare l'efficacia dei vincoli. Per esempio, applicando più carrelli orizzontali ad una trave anch'essa orizzontale otterremo una struttura labile perché capace di traslare parallelamente alla trave stessa. Il sistema potrà essere labile, isostatico o iperstatico a seconda della disposizione dei vincoli. Per determinare le reazioni vincolari di una struttura di questo genere, alle equazioni di equilibrio bisogna affiancare le equazioni di congruenza.

Analizziamo ora ciò che riguarda i sistemi di travi, cioè le strutture in cui più travi semplici sono collegate tra loro tramite vincoli interni e con l'esterno tramite vincoli esterni. Calcoliamo anzitutto il numero di gradi di

libertà residui per un sistema di travi. Consideriamo x travi collegate tra loro, che quindi avranno, nel loro insieme, $3x$ gradi di libertà. Tali gradi di libertà verranno soppressi sia dai vincoli esterni (il cui grado di vincolo chiamiamo n_e) sia dai vincoli interni (il cui grado di vincolo chiamiamo n_i). Di conseguenza, il numero di gradi di libertà residui sarà dato da:

$$3x - (n_e + n_i)$$

Ancora una volta, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia isostatico è che la struttura non abbia gradi di libertà residui e che non abbia centri di rotazione.

Come esempio conclusivo consideriamo una trave rettilinea orizzontale con due cerniere alle estremità e supponiamo di inserire una cerniera interna in mezzeria. Vediamo se il sistema presenta gradi di libertà:

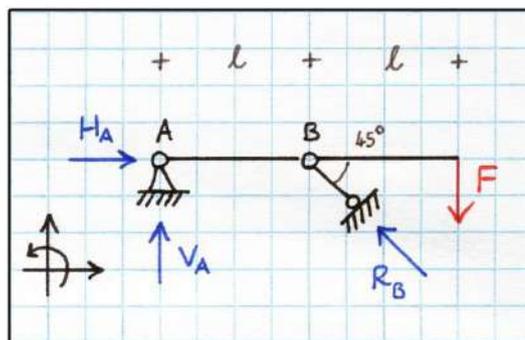
$$3x - (n_e + n_i) = 3 \cdot 2 - (2 + 2 + 2) = 0$$

Il sistema presenta un numero di vincoli tale da poter essere isostatico. Individuiamo i centri di rotazione assoluti (che in questo caso coincidono con le cerniere esterne) e quelli relativi (in questo caso l'unico, coincidente con la cerniera interna). I tre centri sono allineati, quindi il sistema è labile. Qualora il sistema fosse stato un portale, quindi con le tre cerniere disallineate, la struttura sarebbe stata isostatica.

▣ Esercizio 1

Ricavare le reazioni esterne in A e B.

Anzitutto verifichiamo che la struttura sia isostatica. Essendo composta da una sola trave, essa possiede 3 gradi di libertà (ovviamente 2 di traslazione nel piano ed 1 di rotazione). I vincoli sottraggono in totale 3 gradi di libertà (la cerniera in A ne sottrae 2, il pendolo in B ne sottrae un altro), ma l'uguaglianza tra gradi di libertà e grado di vincolo non è sufficiente a stabilire con certezza l'isostaticità (perché alcuni vincoli potrebbero limitare gradi di libertà già limitati da altri vincoli). Per esserne certi possiamo:



- Scrivere la matrice cinematica e verificare che il determinante sia nullo (metodo lento);
- Verificare che non esista un centro di rotazione (metodo istantaneo).

Il centro della cerniera è ovviamente in A, mentre quello del pendolo si trova lungo l'asse del pendolo stesso. Chiaramente il sistema non ha un centro di rotazione, quindi è isostatico.

Adesso, per risolvere una struttura isostatica possiamo utilizzare due metodi:

- scrivere un numero di equazioni di equilibrio pari al numero di incognite da determinare;
- utilizzare il principio dei lavori virtuali per le strutture rigide.

Utilizziamo il primo metodo. Definiamo un sistema di riferimento e scegliamo in maniera del tutto arbitraria il verso delle reazioni vincolari. In questo caso ipotizziamo che le reazioni in A siano orientate come in figura e le chiamiamo V_A e H_A . In B il pendolo restituisce una reazione che può essere unicamente diretta lungo la

direzione del pendolo stesso (la indichiamo con R_B). Applicando le equazioni cardinali della statica otteniamo le seguenti relazioni:

$$\text{Equilibrio lungo } x: \quad H_A - R_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

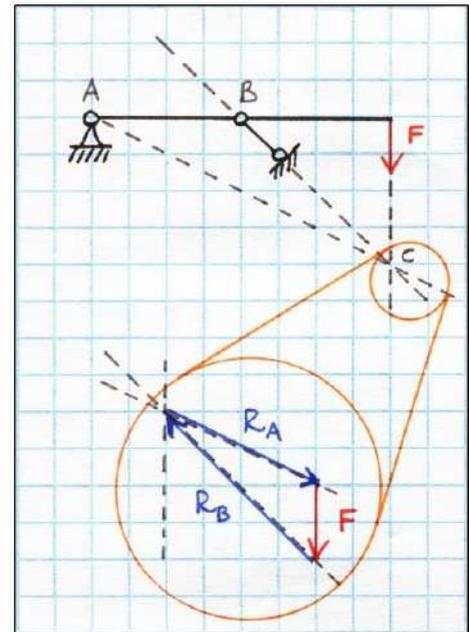
$$\text{Equilibrio lungo } y: \quad V_A + R_B \frac{\sqrt{2}}{2} - F = 0$$

$$\text{Momento rispetto ad A:} \quad -F2l + R_B \frac{\sqrt{2}}{2} l = 0$$

Risolvendo il sistema di equazioni otteniamo: $V_A = -F$; $H_A = 2F$; $R_B = \frac{4F}{\sqrt{2}}$

Osservazione: il fatto che abbia ottenuto una reazione verticale in A negativa significa che la scelta iniziale di orientarla verso l'alto era sbagliata, perché la reazione reale è verso il basso. Ciononostante, questo non compromette la validità dei risultati.

Data la semplicità della struttura, saremmo potuti giungere allo stesso risultato anche mediante un metodo grafico molto semplice: affinché la struttura sia in equilibrio, il poligono delle forze deve essere chiuso. Ricordiamo che il pendolo può esplicare reazioni solo lungo il suo asse, quindi la sua retta di azione può essere solo quella tratteggiata in figura. Chiamiamo C l'intersezione tra l'asse del pendolo e la retta di applicazione della forza F . Notiamo inoltre che la reazione che ci restituisce la cerniera in A dovrà avere come punto di applicazione A, quindi per ottenerne la direzione ci basta congiungere A e C. Possiamo a questo punto decomporre la forza F secondo le due direzioni ottenute perché le reazioni devono essere tali da bilanciare F .



Osservazione: questo metodo è equivalente allo scrivere le equazioni della statica, perché esse ci servono a determinare un sistema di forze tale che le reazioni vincolari ci restituiscano la risultante che sia in modulo identica alle forze agenti (in questo caso solo F), che abbia la stessa direzione ma verso opposto.