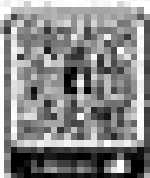


Principi di Aerodinamica



Principi DI



Prefazione

Quest'opera si presta a studenti del corso di Aerodinamica del CdL in Ing. Aerospaziale.

L'importanza di questo testo risiede nel fatto che esso è costruito a misura dello studente medio di Aerodinamica della Federico II, realizzato a partire da un'attenta analisi e rielaborazione delle lezioni del corso e prendendo anche spunto, per la trattazione di alcuni argomenti, dai seguenti testi:

- Monti R., Savino R., *Aerodinamica. Parte prima. Fondamenti e principi*, Napoli, Liguori, 1998;
- Monti R., Savino R., *Aerodinamica. Parte seconda. Regimi di moto*, Napoli, Liguori, 1999;
- Abbott I. H., Von Doenhoff A. E., *Theory of wing sections. Including a summary of Airfoil Data*, New York, Dover Publications, 1959.

Una lettura attenta e consapevole del testo risulta sufficiente al fine di sostenere l'esame, consentendo il raggiungimento di tale obiettivo in tempi relativamente brevi.

Il testo è strutturato in maniera tale da avere la migliore schematizzazione logica degli argomenti. Esso presenta 11 capitoli divisi in paragrafi, 3 appendici e una raccolta di elaborati svolti, presentando ognuna di queste sezioni con il giusto grado di approfondimento. Inoltre, in alcuni punti sono presenti delle integrazioni agli argomenti trattati (opportunamente segnalate come letture facoltative nel testo), che anche se non necessarie ai fini del superamento dell'esame, forniscono una visione più completa della materia.

Al fine di tenere aggiornato questo testo negli anni, gli autori hanno creato la pagina Facebook *Principi DI* (<https://www.facebook.com/PrincipiDI>), alla quale potrete inviare segnalazioni di errori presenti nel testo (di qualsiasi natura: ortografia, grammatica, passaggi matematici), proposte di aggiunte (ad esempio se negli anni vengono affrontati nuovi argomenti durante il corso) o di variazioni della struttura del testo, oltre che a richiedere qualsiasi informazione riguardo la collana di libri *Principi DI*.

Di seguito è mostrata la presentazione della collana.

Indice

1. INTRODUZIONE ALL'AERODINAMICA	1
FLUIDO	1
IPOTESI DEL CONTINUO	1
PARTICELLA DI FLUIDO	2
SCELTA DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO	2
LE FORZE AERODINAMICHE	3
EQUILIBRIO E STABILITÀ: IL PIANO DI CODA	4
IL COEFFICIENTE DI PORTANZA E DI RESISTENZA	4
PROB. N 1: DETERMINAZIONE DEL C_L DI UN AEROMOBILE IN VOLO LIVELLATO	6
VELOCITÀ MINIMA DI SOSTENTAMENTO	6
PROB. N 2: DETERMINAZIONE DELLA VELOCITÀ MINIMA DI SOSTENTAMENTO (VELOCITÀ DI STALLO)	7
EFFICIENZA AERODINAMICA	7
INFORMAZIONI SULL'AERODINAMICA E SULLE PRESTAZIONI DEL VELIVOLO	8
NUMERO DI MACH	9
PROB N 3: DETERMINAZIONE DEL NUMERO DI MACH DELLA CORRENTE ASINTOTICA	9
CLASSIFICAZIONE DEI REGIMI DI MOTO IN BASE AL NUMERO DI MACH	10
VISCOSITÀ	12
NUMERO DI REYNOLDS	13
PROB N 4: DETERMINAZIONE DEL NUMERO DI REYNOLDS DELLA CORRENTE ASINTOTICA	13
GENESI DI PORTANZA E RESISTENZA	14
RESISTENZA INDOTTA DALLA PORTANZA	15
PROB. N 5: DETERMINAZIONE DEL C_{D_i} DI UN AEROMOBILE IN VOLO LIVELLATO UNIFORME	16
PROB. N 6: CONFRONTO DELLE RESISTENZE INDOTTE DI UN AEROMOBILE IN CROCIERA ED IN ATTERRAGGIO	16
LA RESISTENZA TOTALE DI UN AEROMOBILE	17
LA POLARE DI UN AEROMOBILE	17
CENNI DI ARCHITETTURA DELL'ALA	19
LA CURVA DI PORTANZA E IL PROFILO ALARE	21
PRESTAZIONI DEL PROFILO ALARE	23
PORTANZA DI UN PROFILO ALARE E DI UN'ALA	25
2. IDROSTATICA.....	26
PRESSIONE TERMODINAMICA E PRESSIONE IDROSTATICA	26
PRINCIPIO DI PASCAL	26
LEGGE DI STEVINO	27
PROB. N. 7: RICAVARE IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE	29
ATMOSFERA STANDARD (ISA)	30
PROB. N. 9: DIAGRAMMARE LA TEMPERATURA, PRESSIONE E DENSITÀ DELL'ARIA AL VARIARE DELLA QUOTA SECONDO IL MODELLO DI ATMOSFERA ISA	33
3. ELEMENTI DI CALCOLO TENSORIALE.....	34
ALGEBRA DEI VETTORI	34
CALCOLO DIFFERENZIALE VETTORIALE	38
TENSORI	41
ALGEBRA DEI TENSORI	42
CALCOLO DIFFERENZIALE TENSORIALE	45

TENSORE DEGLI SFORZI	47
TEOREMA DI GAUSS GENERALIZZATO (O DI OSTROGRADSKIJ)	49
TEOREMA DI STOKES	50
4. EQUAZIONI DI BILANCIO	51
GRANDEZZE SPECIFICHE	52
STRUTTURA MATEMATICA GENERALE DELL'EQUAZIONE DI BILANCIO	52
EQUAZIONE DI BILANCIO INTEGRALE E DIFFERENZIALE	54
EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA	55
RAPPRESENTAZIONE EULERIANA E LAGRANGIANA	56
DERIVATA SOSTANZIALE	57
FLUSSO CONVETTIVO E DIFFUSIVO	58
EQUAZIONE DI BILANCIO DI UNA GRANDEZZA IN RAPPRESENTAZIONE LAGRANGIANA	59
DEFINIZIONE FISICA DELLA DIVERGENZA DELLA VELOCITÀ	61
PROB. N. 10: DIMOSTRARE CHE IN UN FLUSSO STAZIONARIO LA PORTATA DEL CONDOTTO È COSTANTE	62
EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO	63
PROBLEMA 11: DETERMINARE LE NOVE COMPONENTI DEL TENSORE DEGLI SFORZI DI UN FLUIDO NEWTONIANO	66
PROBLEMA 12: DETERMINARE L'ESPRESSIONE DELLA FORZA AERODINAMICA CHE AGISCE SU UN CORPO IMMERSO IN UNA CORRENTE FLUIDA	67
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA (TOTALE)	68
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA CINETICA	70
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA POTENZIALE	71
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA INTERNA	72
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENTROPIA	72
DETERMINAZIONE DEI SEGNI DELLE VARIE GRANDEZZE PRESENTI NELLE EQUAZIONI DI BILANCIO DI ENERGIA	74
EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES	77
EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES ADIMENSIONALI	79
EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO ADIMENSIONALE	80
EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA ADIMENSIONALE	82
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA TOTALE ADIMENSIONALE	84
AERODINAMICA DEI FLUSSI NON DISSIPATIVI (IDEALI): EQUAZIONI DI EULERO	87
EQUAZIONI DI EULERO IN COORDINATE INTRINSECHE	89
EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES IN FORMA ESPlicitA PER FLUIDI NEWTONIANI	92
5. CINEMATICA DEI FLUIDI E TEOREMI FONDAMENTALI	96
DEFORMAZIONE LINEARE DELLA PARTICELLA	97
VELOCITÀ ANGOLARE DI ROTAZIONE DELLA PARTICELLA	98
DEFORMAZIONE ANGOLARE DELLA PARTICELLA	100
TEOREMA DI CROCCO (EQUAZIONE DI CROCCO)	101
EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO ALLA CROCCO	101
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA CINETICA ALLA CROCCO	103
EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENTROPIA IN REGIME STAZIONARIO E NON DISSIPATIVO	103
TEOREMA DI BERNOULLI	104
FLUSSO IRROTAZIONALE	106
TEOREMA DI BERNOULLI IN REGIME INSTAZIONARIO	109
CIRCUITI	110
I DUE TEOREMI DI HELMHOLTZ	111
LA LEGGE DI BIOT-SAVART PER UN VORTICE ISOLATO	113
COROLLARI DEL TEOREMA DI KELVIN	116

6. REGIMI DI MOTO POTENZIALI INCOMPRESSIBILI E NON DISSIPATIVI	117
POTENZIALE CINETICO E POTENZIALE VETTORE	117
FUNZIONE DI CORRENTE	118
PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI CORRENTE	119
FUNZIONE DI CORRENTE E COORDINATE POLARI	121
ANTISIMMETRIA DI POTENZIALE CINETICO E FUNZIONE DI CORRENTE	122
IL PROBLEMA MATEMATICO	123
CORRENTE UNIFORME	124
POZZO O SORGENTE	126
DOPPIETTA (O DIPOLO)	127
PRIMO PROFILO ALARE: IL CILINDRO	128
DETERMINAZIONE DEL CAMPO DELLE PRESSIONI INTORNO AL CILINDRO	131
COEFFICIENTE DI PRESSIONE	132
DETERMINAZIONE DELLA FORZA AERODINAMICA SUL CILINDRO	133
CAMPO DI MOTO GENERATO DA UN VORTICE ISOLATO	134
CILINDRO PORTANTE	135
CILINDRO PORTANTE: DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI PRESSIONE E DELLA FORZA AERODINAMICA	138
TEOREMA DI KUTTA-ZUKOVSKIJ	138
CONDIZIONE DI KUTTA (PRIMO COLPO DI CULO DELL'AERODINAMICA)	144
PROBLEMATICHE RELATIVE AL TEOREMA DI KUTTA-ZUKOVSKIJ	145
7. TEORIA DELL'ALA INFINITA IN REGIME IDEALE	146
INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI	147
DISTRIBUZIONE LINEARE DI VORTICITÀ	148
TEORIA DI GLAUERT	151
TRASFORMAZIONE DI GLAUERT	155
VERIFICHE DELLA SOLUZIONE DI GLAUERT	156
PROBLEMA N. 17 (FACOLTATIVO): VERIFICARE CHE LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI GLAUERT MOSTRATA SIA ESATTA	157
DETERMINAZIONE DEL CAMPO DELLE PRESSIONI ATTORNO AD UN PROFILO ALARE INFINITAMENTE SOTTILE	159
FORZA ASSIALE E FORZA NORMALE	161
CARICO LUNGO IL PROFILO E COEFFICIENTI DI FORZA AERODINAMICA	162
COEFFICIENTE DI MOMENTO, CENTRO DI PRESSIONE E FUOCO	165
COEFFICIENTI DI FORZA AERODINAMICA NEL CASO DI LASTRA PIANA	169
CAMPO DI MOTO ATTORNO AD UN PROFILO SIMMETRICO AD INCIDENZA NULLA	170
CAMPO DI MOTO ATTORNO AD UN PROFILO SOTTILE DI SPESSORE FINITO A PICCOLE INCIDENZE	173
CARICO BASICO E ADDIZIONALE LUNGO IL PROFILO	175
I PROFILI NACA	176
GEOMETRIA DEI PROFILI NACA	176
PROFILI NACA A 4 CIFRE	177
PROFILI NACA A 5 CIFRE	178
METODO INGEGNERISTICO NACA	180
APPLICAZIONE DEL METODO INGEGNERISTICO NACA	183
8. TEORIA DELL'ALA FINITA IN REGIME IDEALE	185
UTILITÀ E LIMITI DELLA SOLUZIONE BIDIMENSIONALE	185
IL PROBLEMA MATEMATICO IN 3D	185
IL SISTEMA VORTICOSO DELL'ALA	186
IL VORTICE A STAFFA	189
EFFETTO DEI FLAPS SUI VORTICI	189

EFFETTO DEL DOWNWASH SULL'ANGOLO D'ATTACCO E RESISTENZA INDOTTA	190
TRACCIA DELLA SCIA DELL'ALA: VORTICI CONTROROTANTI	191
ESPRESSIONE QUANTITATIVA DEL DOWNWASH E DELL'ANGOLO DI INCIDENZA INDOTTA	192
EQUAZIONE DEL FILETTO PORTANTE DI PRANDTL	193
CONSIDERAZIONI INGEGNERISTICHE: CARICO LUNGO L'ALA	195
EQUAZIONE DEL FILETTO PORTANTE DI PRANDTL ADIMENSIONALE	196
PORTANZA E COEFFICIENTE DI PORTANZA	197
RESISTENZA E COEFFICIENTE DI RESISTENZA	198
ALA CON DISTRIBUZIONE DI CARICO ELLITTICA (SECONDO COLPO DI CULO DELL'AERODINAMICA)	200
COEFFICIENTE DI PORTANZA PER UN'ALA CON DISTRIBUZIONE DELLE CORDE ELLITTICA	202
PROBLEMA N. 18: DETERMINARE PER UN'ALA DI ASSEGNATO AR E PER UN DATO C_L L'ORDINE DI GRANDEZZA DI γ	204
CARICO BASICO E CARICO ADDIZIONALE	204
METODO INGEGNERISTICO DI SCHRENK	208
9. TEORIA DELLO STRATO LIMITE	210
LO STRATO LIMITE	210
TEORIA DELLO STRATO LIMITE	212
EQUAZIONI DI PRANDTL DELLO STRATO LIMITE PER LA LASTRA PIANA	213
RISOLUZIONE DEI PROBLEMI FISICI	216
EQUAZIONI DI PRANDTL DELLO STRATO LIMITE PER UN CORPO GENERICO	217
EFFETTO DELL'ATTRITO E COEFFICIENTE DI ATTRITO	218
SPESSORE DELLO STRATO LIMITE	220
SPESSORE DI SPOSTAMENTO	221
VELOCITÀ NORMALE AL BORDO DELLO STRATO LIMITE	222
SPESSORE DI QUANTITÀ DI MOTO	223
DIMOSTRAZIONE LEGAME TRA RESISTENZA E SPESSORE DI QUANTITÀ DI MOTO	224
FATTORE DI FORMA	226
PROB. N. 19: CALCOLARE IL FATTORE DI FORMA PER UN PROFILO DI VELOCITÀ TRIANGOLARE	226
SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI PRANDTL DELLO STRATO LIMITE PER LA LASTRA PIANA A INCIDENZA NULLA	227
CONSEGUENZE DELLA SOLUZIONE DI BLASIUS	232
PROB. N. 21: CALCOLARE LA RESISTENZA DI UNA LASTRA PIANA LUNGA 10CM LAMBITA DA UNA CORRENTE DI 10KM/H IN	
CONDIZIONI STANDARD DI PRESSIONE E TEMPERATURA	234
CAMPO DI MOTO IN PRESENZA DI GRADIENTE DI PRESSIONE	235
PUNTO DI SEPARAZIONE DELLO STRATO LIMITE	237
10. TURBOLENZA E PROFILI LAMINARI	238
PROBLEMA DELLA SENSIBILITÀ ALLE CONDIZIONI INIZIALI	238
ESPERIENZA DI REYNOLDS	238
ESEMPI E CARATTERIZZAZIONE DELLO STRATO LIMITE TURBOLENTO	239
ANALISI DELLE VELOCITÀ IN UN FLUSSO TURBOLENTO	240
PROFILO DELLE VELOCITÀ IN REGIME TURBOLENTO E COEFFICIENTE DI ATTRITO	241
EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES MEDIATE ALLA REYNOLDS	242
STRATO LIMITE TURBOLENTO E IPOTESI DI BOUSSINESQ	245
LO STRATO LIMITE SUI PROFILI ALARI AD ELEVATO NUMERO DI REYNOLDS	247
EFFETTI DEL GRADIENTE DI PRESSIONE	248
RESISTENZA DI SCIA O DI FORMA	252
CORPI AERODINAMICI E CORPI TOZZI	253
GRAFICO DEL COEFFICIENTE DI RESISTENZA DI UN CILINDRO AL VARIARE DEL NUMERO DI REYNOLDS	253
TIPOLOGIE DI STALLO IN BASE AL PROFILO	255

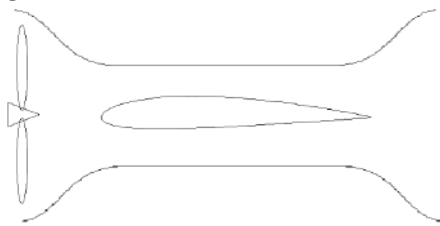
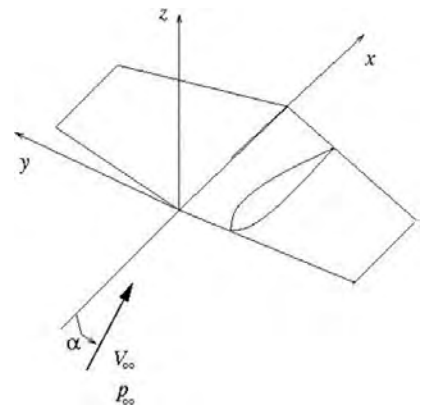
DIPENDENZA DELLA CURVA DI PORTANZA DAL NUMERO DI REYNOLDS	256
PROFILI LAMINARI	256
DETERMINAZIONE ANALITICA DI UNA LINEA MEDIA CON CARICO COSTANTE	259
SISTEMA DI NUMERAZIONE PROFILI NACA LAMINARI	261
11. EFFETTI DELLA COMPRIMIBILITÀ	264
ANALISI QUANTITATIVA DEGLI EFFETTI DELLA COMPRIMIBILITÀ	264
SIMILITUDINE DI PRANDTL-GLAUERT	266
EQUAZIONE DELL'ENERGIA IN COORDINATE INTRINSECHE	267
COEFFICIENTE DI RESISTENZA E COMPRIMIBILITÀ	269
L'ALA A FRECCIA	273
DISTRIBUZIONE DEL CARICO LUNGO UN'ALA A FRECCIA	275
PROFILI SUPERCRITICI	277
APPENDICE A – L'IPERSOSTENTAZIONE	278
I SISTEMI DI IPERSOSTENTAZIONE	279
FLAP, SLOT, FLAP FOWLER E SLAT	279
APPENDICE B – XFOIL	281
APPENDICE C – L'AEROMOBILE	286
LE POLARI	286
ESPRESSIONE APPROSSIMATA DELLA POLARE	286
APPENDICE D – CALCOLI FREQUENTI	287

8. Teoria dell'ala finita in regime ideale

Utilità e limiti della soluzione bidimensionale

Passiamo, adesso, allo studio dell'ala finita. Prima di tutto cercheremo di capire se e quando la soluzione bidimensionale è praticamente realizzabile: ovviamente nella realtà è impossibile realizzare un'ala infinita, tuttavia vedremo che sotto certe ipotesi è possibile applicare la teoria bidimensionale anche in certe zone di un'ala finita.

Consideriamo un'ala e sezioniamola con un piano parallelo al piano di simmetria ottenendo un profilo alare (vedi figura destra); immaginando ora di fare un'ala con apertura infinita: il campo di moto risulterà, sezione per sezione, identico, cioè bidimensionale. Tuttavia, come già detto, questo nella realtà non è fattibile quindi la soluzione adottata in galleria del vento è mettere un'ala a sezione costante che va da parete a



parete della cosiddetta camera di prova. L'esperienza mostra che nella zona lontana dalle pareti il campo di moto risulta bidimensionale. Si noti che le prove bidimensionali sono molto complicate da realizzare infatti le prove 3D sono più vicine ai dati teorici di quelle 2D proprio in quanto è molto difficile ottenere un'effettiva bidimensionalità in galleria del vento.

Ludwig Prandtl, pioniere dell'aerodinamica, grande teorico e sperimentista, si chiese se esistevano zone in cui era possibile approssimare il campo di moto a bidimensionale e facendo molte prove in galleria del vento si rese conto che sotto determinate ipotesi si poteva continuare a utilizzare la teoria bidimensionale.

Il problema matematico in 3D

Per risolvere il problema del flusso intorno all'ala dovremmo impostare le equazioni di Navier-Stokes in 3D e le condizioni al contorno (corrente uniforme all'infinito e condizione di no-slip, cioè velocità nulla, sul corpo). Inoltre, dovremmo anche assegnare delle condizioni al contorno di natura termodinamica, ad esempio il flusso termico alla parete. Anche se il problema è "un po' incerto" (non abbiamo i teoremi di esistenza e unicità) più o meno ci arrangiamo. Assegnate tutte le condizioni al contorno per risolvere le equazioni al computer ci vorrebbero 1000-2000 anni. Tuttavia, se valgono le seguenti ipotesi:

- corrente a monte uniforme che investe un corpo tridimensionale;
- flusso stazionario;
- flusso incomprimibile ($M_\infty \rightarrow 0$);
- flusso non dissipativo ($Re_r \rightarrow \infty$, $Pe_r \rightarrow \infty$);

alcuni termini delle equazioni si possono trascurare. Inoltre, l'equazione di Crocco vale sia in caso 2D che 3D e, escludendo che il flusso sia alla Beltrami, ci dice che il flusso è irrotazionale, ovvero che il campo è a potenziale, cioè $\exists \phi: \nabla \phi = \underline{V}$.

N.B.: poiché il problema è tridimensionale la funzione di corrente non esiste e quindi possiamo lavorare solo con il potenziale cinetico ϕ .

Quindi con queste considerazioni anche in 3D il problema si riduce a risolvere l'equazione di Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

con le condizioni al contorno:

- All'infinito: $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \phi_\infty$ (corrente a monte uniforme)
- Sul corpo: $\underline{\nabla} \phi \cdot \underline{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \underline{n}} = 0$ (corpo impermeabile)

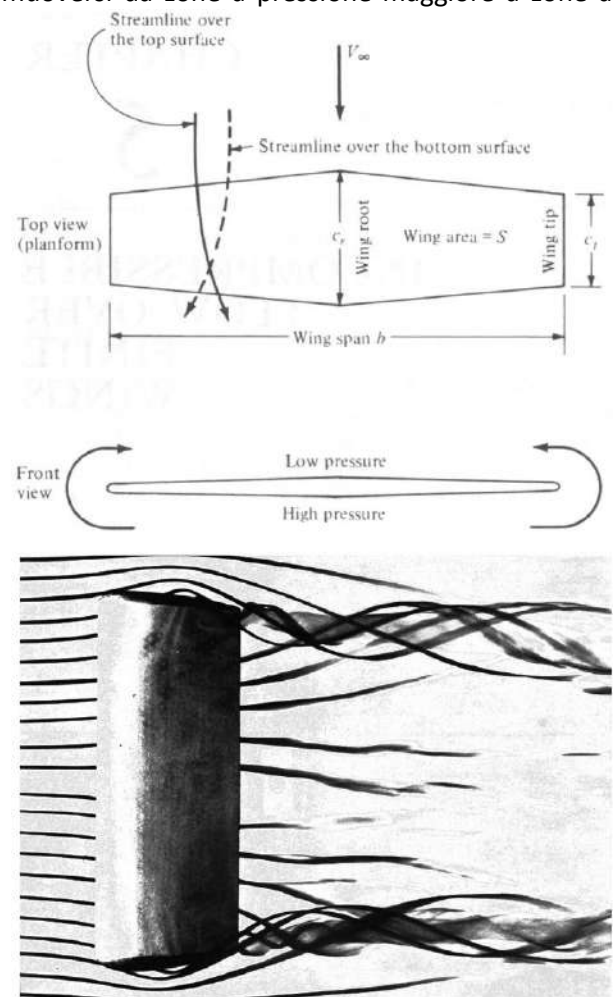
Come per i problemi bidimensionali affrontati, anche in questo caso la soluzione si può trovare, data la linearità, sovrapponendo un certo numero di soluzioni elementari. Tuttavia, nel caso di un aeroplano le incognite non sono 100 o 200 ma sono decine di migliaia: quindi il calcolatore, sempre utilizzando la tecnica della pannellizzazione (si veda *Appendice B – XFOIL*), impiegherà molto tempo in più a risolvere il sistema lineare (anche se non utilizza la regola di Cramer ma quella di sostituzione). Tra l'altro mentre in 2D si poteva utilizzare la tecnica delle trasformate conformi, in 3D questo non è possibile, in quanto essendo una funzione analitica in campo complesso costituita da una parte reale e una immaginaria, tale tecnica è possibile usarla solo se le incognite sono 2 (si ricordi che nel caso 2D avevamo potenziale cinetico e funzione di corrente, mentre adesso abbiamo potenziale cinetico e le tre componenti del potenziale vettore).

Una volta trovato ϕ , derivando, otteniamo il campo di velocità e, tramite il teorema di Bernoulli, la pressione in ogni punto, infine, integrando la distribuzione di pressioni sul corpo, otteniamo la forza aerodinamica.

Il sistema vorticoso dell'ala

Al fine di stabilire sotto quali ipotesi possiamo approssimare il campo di moto attorno ad un'ala a bidimensionale, immaginiamo di provare in galleria del vento varie ali diritte con diverso allungamento alare in regime iposonico e non dissipativo: quello che noteremo è che lontano dall'estremità dell'ala il campo di moto risulta bidimensionale. Nel caso 2D, ricordando che il profilo si mette da parete a parete nella camera di prova, l'aria ha la possibilità di passare solo sotto e sopra il profilo, in 3D invece, l'aria può passare anche di lato. Immaginando che l'ala stia generando portanza abbiamo che mediamente la pressione sul ventre è maggiore di quella sul dorso e quindi l'aria tenderà a muoversi da zone a pressione maggiore a zone a

pressione minore. In figura viene mostrato il movimento dell'aria attorno ad un'ala: con linea tratteggiata sono indicati il flusso sul ventre mentre con linea continua quello sul dorso. Come si nota, mentre nel centro le linee di corrente sono allineate con la corrente asintotica, man mano che ci avviciniamo all'estremità l'aria sul ventre tenderà a scappare verso l'esterno e quella sul dorso verso l'interno, cioè il flusso tende ad arrotolarsi (roll-up, arrotolamento) creando due vortici controrotanti detti vortici liberi (gli stessi vortici che vediamo formarsi dietro gli alettoni delle auto di Formula 1 solo che in quel caso girano nel verso opposto perché l'alettone è deportante). La formazione dei vortici liberi d'estremità su di un'ala finita portante può essere spiegata dal fatto che, a causa della tridimensionalità del campo di moto, sono presenti significative componenti di velocità trasversali lungo il dorso e lungo il ventre dell'ala (cross-flow). Le soluzioni numeriche, infatti, evidenziano la presenza di gradienti di pressione in direzione trasversale che determinano componenti di velocità dirette dal piano di mezzeria verso l'estremità sul ventre, e viceversa sul dorso. Appare evidente quindi, che per la differenza di pressione esistente fra il dorso e il ventre, il flusso d'aria in prossimità delle estremità dell'ala tende ad andare dal ventre al dorso dando luogo alla formazione dei vortici liberi. La cosa importante che avevamo già intuito, e che l'esperienza mette ancora più in luce, è che nel centro dell'ala, lontano dall'estremità (dove invece gli effetti tridimensionali sono fondamentali) il campo di moto è sostanzialmente bidimensionale.



Quindi l'ipotesi di bidimensionalità la possiamo mantenere se l'allungamento è molto grande e l'angolo di freccia è molto piccolo:

$$\begin{cases} AR \gg 1 \\ \Lambda \approx 0 \end{cases}$$

N.B.: si tenga presente che la freccia può essere positiva o negativa: quasi tutti gli aerei hanno la freccia positiva, in quanto, anche se aerodinamicamente la freccia negativa è migliore, essa presenta molti inconvenienti che sono stati causa di incidenti e che analizzeremo più avanti.

Quindi la teoria che andremo a sviluppare sarà tanto più valida quanto maggiore è l'allungamento alare e minore è l'angolo di freccia; in essa si tiene conto dei vortici che si creano all'estremità.

N.B.: se, al limite, l'ala è infinita abbiamo proprio la soluzione bidimensionale.

Aggiunte queste due ipotesi possiamo usare la teoria 2D. La più semplice teoria bidimensionale che prevede la presenza della portanza è quella delle piccole perturbazioni di Glauert, la quale ritiene che ai fini della portanza lo spessore non ha utilità e, quindi, approssima il profilo alare alla linea media curva schematizzata come un segmento, la corda, lungo la quale viene posta una distribuzione lineare di vortici $\gamma(x)$. Notiamo che l'integrale esteso alla corda di $\gamma(x)$ in dx fornisce proprio la circolazione totale intorno al corpo:

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x) dx$$

Se immaginiamo di allontanarci tantissimo da tale distribuzione di vortici, essa ci apparirà come un punto, cioè il campo di moto sarà equivalente a quello di un unico vortice di intensità Γ , posto ad esempio a un quarto della corda.

La teoria dell'ala finita viene attribuita a Prandtl e a Lanchester, tuttavia quest'ultimo propose solo un disegno come quello a destra mentre tutta la teoria matematica fu sviluppata da Prandtl e dai suoi allievi.

